I Giochi di Archimede - Soluzioni Triennio

17 novembre 2004

B	C	E	D	A	E	C	C	C	A	B	B	D	D	C	C	C	D	B	D	C	B	D	C	E
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

1) La risposta è **(B)**. Infatti b è la radice quadrata (con segno +) di un numero reale, e quindi è maggiore o uguale a zero.

2) La risposta è **(C)**. Vediamo come aumenta il numero di marziani che possiedono un cellulare nei giorni successivi al 17 novembre: 10 (17 novembre), 20, 40, 80, 160, 320, 640, 1280, 2560, 5120, 10240 (27 novembre). Il primo giorno in cui almeno 10000 marziani possiedono un cellulare è quindi il 27 novembre.

3) La risposta è **(E)**. L'altezza a cui Tarzan deve legare la catena è la lunghezza di un cateto di un triangolo rettangolo di cui l'altro cateto è il raggio della radura e l'ipotenusa è la catena. Dal Teorema di Pitagora segue allora che l'altezza misura in metri $\sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = 5$.

4) La risposta è **(D)**. Tutti e tre i numeri sono divisibili per 3, dunque anche la loro somma $(a+b+c)$ è divisibile per 3 e quindi questa somma al quadrato, cioè $(a+b+c)^2$, è divisibile per 9. Osserviamo che le affermazioni contenute nelle risposte diverse da **(D)** sono false per $a = 15$, $b = 12$ e $c = 42$.

5) La risposta è **(A)**. L'equazione ha almeno una soluzione reale se e soltanto se il discriminante del polinomio $x^2+ax+a+1$ è maggiore o uguale a zero; questo discriminante è: a^2-4a-4, ed è quindi a sua volta un polinomio di secondo grado, in a. Le sue radici (soluzioni di $a^2 - 4a - 4 = 0$) sono $2 - 2\sqrt{2}$ e $2 + 2\sqrt{2}$. Dunque i valori di per cui $a^2 - 4a - 4 \geq 0$ sono quelli per cui $a \leq 2 - 2\sqrt{2}$ e $a \geq 2 + 2\sqrt{2}$; poichè $2 - 2\sqrt{2} < 0$, i valori di a maggiori o uguali a zero e tali che $a^2 - 4a - 4 \geq 0$ (e quindi tali che l'equazione iniziale abbia almeno una soluzione reale) sono quelli per cui $a \geq 2 + 2\sqrt{2}$ e il minimo di questi valori è $a = 2 + 2\sqrt{2}$.

6) La risposta è **(E)**. I triangoli DBG e CEF sono entrambi rettangoli isosceli e i loro cateti misurano $\frac{1}{4}L$; quindi ciascuno di loro ha area $\frac{1}{32}L^2$. L'area del pentagono $ADGFE$ è la differenza tra l'area di ABC, che vale $\frac{1}{2}L^2$, e la somma delle aree dei triangoli DBG e CEF; quindi 7 m^2 $= \frac{1}{2}L^2 - \frac{1}{16}L^2 = \frac{7}{16}L^2$, da cui si ricava $L = 4$ m.

7) La risposta è **(C)**. La prima cifra può essere uno qualunque tra i numeri 1, 2, 3, 4 e 5; dunque ci sono 5 scelte per la prima cifra. Per la seconda e la terza ci sono sei scelte: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Per la quarta cifra ci sono solo due scelte: 0 e 5; infatti affinchè il numero sia divisibile per 5 la sua ultima cifra deve essere 0 oppure 5. Il numero complessivo di scelte di quattro numeri tra 1, 2, 3, 4 e 5 per comporre un numero di quattro cifre divisibile per 5 è dato dal prodotto delle scelte possibili per ciascuna delle cifre, cioè: $5 \times 6 \times 6 \times 2 = 360$.

8) La risposta è **(C)**. Se S indica la spesa sostenuta da Marco nel 2002, quella del 2003 è: $2S - 2S\frac{30}{100} = \frac{7}{5}S$. Analogamente, la spesa sostenuta nel 2004 è pari ai sette quinti di quella del 2003, cioè $\left(\frac{7}{5}\right)^2 S = \frac{49}{25}S$. Poichè $\frac{49}{25}$ è maggiore di 1 e minore di 2, la spesa del 2004 è maggiore di quella del 2002 ma minore del doppio di essa.

9) La risposta è **(C)**. Osserviamo che $n^2 - 14n + 24 = (n-12)(n-2)$, quindi, affinchè questa espressione coincida con un numero primo p è necessario che si verifichi una delle due situazioni seguenti. *I caso*: $n - 12$ e $n - 2$ sono numeri positivi, di cui uno coincide con 1 e l'altro con p. *II caso*: $n - 12$ e $n - 2$ sono due numeri negativi di cui uno coincide con -1 e l'altro con $-p$. Il primo caso porta a $n-12 = 1$ ($n-12$ è sicuramente minore di $n-2$ e dunque deve coincidere con 1), $n = 13$, $n - 2 = 11$, numero primo; quindi abbiamo il valore accettabile $n = 13$. Il secondo caso porta a $n - 2 = -1$, $n = 1$, e $n - 12 = -11 = -p$ con p numero primo; quindi abbiamo un secondo valore accettabile $n = 1$. In tutto abbiamo due valori accettabili per n.

10) La risposta è **(A)**. Calcoliamo le dimensioni (altezza e dimensioni della base) interne della cassetta. L'altezza interna è pari a quella esterna meno 2 cm (perchè la cassetta non ha coperchio), ovvero 45 cm. Le dimensioni interne della base sono invece uguali a quelle esterne dimuite di 4 centimetri ciascuna, ovvero sono 34 cm e 40 cm. Il volume interno è allora $(34 \times 40 \times 45)$ cm^3 cioè 61200 cm^3.

11) La risposta è **(B)**. Supponiamo che il primo dei quattro amici sia bugiardo; questo vuol dire che c'è esattamente un bugiardo (cioè il primo stesso), se infatti ce ne fossero almeno due, il primo avrebbe detto il vero, contraddicendo il fatto che è un bugiardo. D'altra parte il secondo dei quattro dà ragione al primo, e dunque è anche egli un bugiardo, questo ci porta ad una contraddizione. Quindi il primo non è un bugiardo. Il secondo, conseguentemente, non è neppure lui un bugiardo, ma allora i bugiardi sono al più due (il terzo e il quarto); d'altra parte i bugiardi devono essere almeno due, perchè questo è quanto viene detto dal primo, che non è un bugiardo. In conclusione, l'unica situazione possibile è: primo e secondo non bugiardi, terzo e quarto bugiardi; questa è compatibile con le affermazioni che vengono fatte e porta alla soluzione.

12) La risposta è **(B)**. Il primo cuscino (dal basso) ha sopra di sé un peso di $\frac{19}{2}$ kg e dunque il suo spessore diminuisce di 19 cm, diventando 11 cm; allo stesso modo il secondo diminuisce di 18 cm e il suo spessore diventa 12 cm, il terzo diminuisce di 17 cm il suo spessore diventa 13 cm e così via fino all'ultimo cuscino il cui spessore rimane di 30 cm. Lo spessore della pila di cuscini è allora pari a $(11 + 12 + 13 + \cdots + 28 + 29 + 30) = 410$ cm.

13) La risposta è **(D)**. Indichiamo con A, B e C i vertici del triangolo, in modo che A sia il vertice dell'angolo retto, il cateto AB misuri 21 cm e il cateto AC misuri 28 cm. Indichiamo inoltre con F il centro della circonferenza di cui la semicirconferenza fa parte (F appartiene all'ipotenusa BC) e con D e E i punti in cui la semicirconferenza è tangente ai lati AB e AC rispettivamente. I triangoli CEF e FDB sono simili; se x indica la misura (in centimetri) del raggio della semicirconferenza, abbiamo allora $\frac{28-x}{x} = \frac{x}{21-x}$. Questa equazione ha una sola soluzione: $x = 12$. Dunque l'area della semicirconferenza è $(\pi 12^2)/2$ cm^2=72π cm^2.

14) La risposta è **(D)**. Osserviamo che $a^2 - 4b^2 = (a-2b)(a+2b)$. Poichè a e b sono positivi, lo è anche $a+2b$ e quindi lo deve essere anche $a-2b$. I numeri $a-2b$ e $a+2b$ devono essere quindi due divisori positivi di 45, il cui prodotto è 45, e di cui il primo è minore del secondo. Le possibilità sono tre: $a - 2b = 1$ e $a + 2b = 45$, questa porta a $a = 23$, $b = 11$; $a - 2b = 3$ e $a + 2b = 15$, che porta a $a = 9$, $b = 3$; $a - 2b = 5$ e $a + 2b = 9$ che porta a $a = 7$, $b = 1$. In tutti e tre i casi abbiamo coppie accettabili e quindi abbiamo tre soluzioni.

15) La risposta è **(C)**. Il primo dei 2004 giorni ci saranno tre amebe, di cui una scura, una chiara e una che ha la stessa probabilità, cioè $\frac{1}{2}$, di essere chiara o scura. Indichiamo il primo caso con CSC (chiara, scura, chiara) e il secondo con CSS. Il primo caso porta, il secondo giorno, alle tre possibiltà $CCSC$, $CSSC$ e $CSCC$ (ovvero in cui sia la prima, la seconda oppure la terza a dividersi); osserviamo che queste tre possibilità hanno la stessa probabilità di accadere, cioè $\frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$. Analogamente il secondo caso porta alle tre seguenti possibilità per il secondo giorno: $CCSS$, $CSSS$, $CSSS$, tutte aventi probabilità $\frac{1}{6}$ di accadere. Quindi, il secondo giorno ci saranno, oltre a due amebe una chiara e una scura, due amebe per le quali i tre eventi: entrambe chiare, entrambe scure, una chiara e una scura, hanno la stessa probabilità di accadere, cioè $\frac{1}{3}$. In particolare, la probabilità che ci sia una sola ameba scura il secondo giorno è $\frac{1}{3}$. Questo ragionamento si può ripetere per i giorni successivi; in un generico giorno n ci saranno sicuramente una ameba chiara e una ameba scura, più n amebe; gli eventi che tra queste n ve ne siano esattamente k scure, al variare di $k = 0, 1, 2, \ldots n$, hanno tutti la stessa probabilità di accadere; poichè si tratta di $n + 1$ eventi, questa probabilità è $\frac{1}{n+1}$. In particolare, anche la probabilità che vi sia una sola ameba scura il giorno n è $\frac{1}{n+1}$. Per $n = 2004$ otteniamo la soluzione $\frac{1}{2005}$.

16) La risposta è **(C)**. Affinchè x risolva l'equazione, dobbiamo essere in uno dei casi seguenti. Primo caso: $x + 2 = 0$; secondo caso: $x^2 - x - 1 = 1$; terzo caso $x^2 - x - 1 = -1$ e $x - 2$ multiplo di 2. Il primo caso ci porta a $x = -2$, che è una soluzione accettabile. Il secondo caso ci porta ai due valori $x = 2$ e $x = -1$, soluzioni di $x^2 - x - 1 = 1$, entrambi accettabili. Nel terzo caso dobbiamo avere $x^2 - x - 1 = -1$, da cui $x = 0$ oppure $x = 1$; per il primo valore abbiamo $x - 2 = -2$ che è multiplo di 2 e si tratta in effetti di una soluzione accettabile; per il secondo valore invece $x - 2 = -1$ e quindi $x = 1$ non è una soluzione. Complessivamente abbiamo le quattro soluzioni: $-2, -1, 0, 1$.

17) La risposta è **(C)**. Osserviamo che i triangoli DMP e CPB sono simili. Se h indica la misura dell'altezza di DMP rispetto alla base DM e k indica la misura dell'altezza di CPB rispetto alla base CB, deve essere (per la precedente similitudine): $\frac{h}{k} = \frac{DM}{CB} = \frac{1}{2}$. D'altra parte, la somma di h e k coincide con la misura del lato del quadrato: $h + k = 1$. Si trova allora $h = \frac{1}{3}$ e l'area cercata è quindi $\frac{h}{2} DM = \frac{1}{12}$.

18) La risposta è **(D)**. Osserviamo innanzitutto che se un numero n è parofilo, e m è un multiplo di n, allora anche m è parofilo, poichè i multipli di m sono anche multipli di n e quindi terminano con due cifre pari. Il numero 2740 è multiplo di 20 e 20 è parofilo, infatti ogni multiplo di 20 ha come ultima cifra 0 e come penultima cifra un multiplo di 2. Dunque 2740 è parofilo.

19) La risposta è **(B)**. Le quattro affermazioni fatte sono le seguenti. I: $a > b$; II: $b > c$; III: $c > a$; IV: $2a = b + c$. Se la I fosse falsa, dalla II e la III avremmo $a < b$ e $a < c$ quindi $2a < b + c$ che contrasta la IV, quindi la I non può essere falsa. Se la III fosse falsa, avremmo analogamente dalla I e la II $a > b$ e $a > c$ da cui $2a > b + c$ che contrasta la IV, quindi la III è vera. La IV non può essere falsa, perchè I e II sono in chiara contraddizione con III. Dunque la sola affermazione che può esere falsa è la II. D'altra parte le affermazioni I, III e IV non sono in contrasto tra loro (scelto comunque il numero a, se si pone $b = a - 1$ e $c = a + 1$ le tre affermazioni sono verificate). Dalla I e la III segue allora che $b < a < c$.

20) La risposta è **(D)**. Dalla figura si deduce che la bisettrice dell'angolo $\widehat{BCA}$ è la retta verticale passante per C, infatti i due lati CB e CA sono inclinati in modo simmetrico rispetto a tale retta; chiamiamo r questa retta. Analogamente, si osserva che la bisettrice dell'angolo $\widehat{CAB}$ è la retta, passante per A, inclinata di 45^o rispetto alla direzione orizzontale della griglia, che interseca la parte interna del triangolo; chiamiamo s questa retta. Il punto P in cui r e s si incontrano si trova allora spostandosi, a partire da A, di 5 unità orizzontalmente verso destra e di 5 unità verticalmente verso l'alto. P è il centro del cerchio inscritto nel triangolo ABC. Indichiamo con Q il punto che si trova partendo da P e spostandosi orizzontalmente di 2 unità verso destra e verticalmente di una unità verso l'alto; Q appartiene al lato BC. Il segmento PQ è ortogonale al lato CB e dunque la sua misura è pari al lato del cerchio inscritto. D'altra parte, per il Teorema di Pitagora, la misura di PQ è $\sqrt{1+2^2}\,u = \sqrt{5}\,u$.

21) La risposta è **(C)**. I termini della successione possono essere scritti facilmente come potenze di 2; in questo modo infatti la potenza di ciascun termine (dal terzo in poi) è la somma delle potenze dei due termini precedenti. La successione è allora formata da: $1 = 2^0$, $2 = 2^1$, $2 = 2^{0+1} = 2^1$, $4 = 2^{1+1} = 2^2$, $8 = 2^{2+1} = 2^3$, $2^{3+2} = 2^5$, $2^{5+3} = 2^8$, $2^{8+5} = 2^{13}$, $2^{13+8} = 2^{21}$, $2^{21+13} = 2^{34}$, $2^{34+21} = 2^{55}$, $2^{55+34} = 2^{89}$, $2^{89+55} = 2^{144}$; quest'ultimo è il tredicesimo termine.

22) La risposta è **(B)**. L'equazione di partenza è

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{x}}}\,.$$

Questa diventa, attraverso semplificazioni successive

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{x}{1+x}} = 1 + \frac{1}{\frac{1+2x}{1+x}} = 1 + \frac{1+x}{1+2x} = \frac{2+3x}{1+2x}$$

(si è supposto via via che: $x \neq 0$, $x \neq -1$, $x \neq -\frac{1}{2}$). Quindi si arriva all'equazione $x = (2+3x)/(1+2x)$. Dopo alcuni ulteriori (e semplici) passaggi, si trova che x deve risolvere l'equazione di secondo grado: $x^2 - x - 1 = 0$ che ha come soluzioni $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ e $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Di queste, solo la seconda è positiva.

23) La risposta è **(D)**. La 2004-esima lettera è la quarta lettera della 501-esima parola, infatti $2004 = 501 \times 4$. Osserviamo che le quarte lettere delle parole (essendo anche le lettere finali) si ripetono a cicli di 21. Poichè $501 = 21 \times 23 + 18$, la quarta lettera della 501-esima parola coincide con la quarta lettera della 18-esima parola, cioè T.

24) La risposta è **(C)**. Siano α, β, γ gli angoli del triangolo in A, B, C rispettivamente. Considerando il triangolo BIC, si ottiene $\widehat{BIC} = 180^o - \frac{\beta+\gamma}{2}$. Ma $\widehat{BIC} = \widehat{EID}$ (sono opposti al vertice) e, poiché $IDAE$ è iscrivibile in una circonferenza, α è il supplementare di $\widehat{EID}$, ossia $\alpha = \frac{\beta+\gamma}{2}$. Sostituendo $\beta + \gamma = 180^o - \alpha$ si ottiene $\alpha = 60^o$.

25) La risposta è **(E)**. La probabilità di scegliere ciascuno dei due sacchetti è $\frac{1}{2}$. Se p_1 è la probabilità di estrarre una mela marcia dal primo sacchetto, e p_2 la probabilità di estrarre una mela marcia dal secondo sacchetto, la probabilità di estrarre una mela marcia vale complessivamente $p = \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_2$. Se tutte le mele marce si trovano in uno solo dei due sacchetti (per es. il primo), allora $p_2 = 0$, e la probabilità totale non può superare $\frac{1}{2}$. Invece, ponendo tre mele marce (e solo quelle) nel primo sacchetto, le altre sette nel secondo sacchetto, si ha $p_1 = 1$, $p_2 = \frac{1}{7}$, e conseguentemente $p = \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{7} = \frac{4}{7}$. Questa è l'unica disposizione con la quale $p > \frac{1}{2}$. Ciò può essere verificato considerando materialmente i diversi casi possibili (non sono tanti!), oppure come segue:
- con 3 mele, in un sacchetto (k delle quali marce) e 7 nell'altro si ha $p_1 + p_2 = \frac{k}{3} + \frac{4-k}{7} = \frac{1}{21} \times (4k + 12)$, massimo $(= \frac{8}{7})$ per $k = 3$; k può essere 0,1,2,3.
- con 4 mele, in un sacchetto (k delle quali marce) e 6 nell'altro si ha $p_1 + p_2 = \frac{k}{4} + \frac{4-k}{6} = \frac{1}{12} \times (k+8)$, massimo (=1) per $k = 4$; k può essere 0,1,2,3,4.
- con 5 mele, in un sacchetto (k delle quali marce) e 5 nell'altro si ha $p_1 + p_2 = \frac{k}{5} + \frac{4-k}{5} = \frac{4}{5}$; k può essere 0,1,2,3,4.